



CONCOURS D'ADMISSION
SÉRIE D
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

Session : 2023

Exercice 1 : (5pts)

Un sac contient 5 boules indiscernables au toucher dont deux portent le numéro 1, deux portent le numéro 2 et une porte le numéro 3.

1. On tire simultanément et au hasard 2 boules du sac. On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des numéros obtenus.
 - (a) Déterminer la loi de probabilité de X .
 - (b) Calculer l'espérance mathématique de X .
2. On tire successivement et avec remise 2 boules du sac.
 - (a) Déterminer la probabilité de l'événement « les boules sont identiques ».
 - (b) On répète 10 fois de façon indépendante cette épreuve et on désigne par Y le nombre de fois qu'on obtient deux boules identiques lors de ces 10 épreuves.
 - i. Déterminer la loi de probabilité de Y .
 - ii. Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y .

Exercice 2 : (5pts) *Les questions I et II sont indépendantes*

I- On considère dans \mathbb{C} l'équation $(E) : z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1 = 0$ où a et b sont deux nombres réels.

1. Démontrer que si z_0 est solution de (E) alors $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{z_0}$ sont aussi solutions de (E) .
2. Déterminer a et b sachant que $1 + i$ est solution de (E) .
3. En déduire trois autres solutions de (E) .
4. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) .

II- Dans le plan complexe (\mathcal{P}) muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3 - i$, $z_B = -1 + 3i$ et $z_C = (1 + 2\sqrt{3})(1 + i)$.

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
2. Calculer z_I et z_G affixes respectives des points I milieu de $[AB]$ et G centre de gravité du triangle ABC.



3. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe plane (S) qui transforme B en A et O en I .

Problème : (10pts) Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : (5 points) Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$. Soit (U_n) la suite

définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout réel $x > 1$, $f(x) > 1$.
2. On considère les suites (V_n) et (W_n) , tels que, pour tout entier n , $V_n = \frac{U_n-1}{U_n}$ et $W_n = \ln V_n$
 - (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n > 1$.
 - (b) Calculer V_1 et W_1 .
 - (c) Démontrer que (W_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
 - (d) Exprimer pour tout entier naturel n , W_n et V_n en fonction de n .
 - (e) En déduire que : $U_n = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{2^n}}$; puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Partie B : (5 points) Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = x^2 e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec pour unités 1cm sur l'axe des abscisses et 4cm sur l'axe des ordonnées.

1.
 - (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.
 - (b) Étudier le sens de variations de h .
 - (c) Dresser le tableau de variations de h .
 - (d) Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
2.
 - (a) Déterminer les nombres réels a , b et c pour que la fonction H définie par $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction h .
 - (b) Soit λ un réel strictement positif. Calculer le réel : $\int_0^\lambda h(x) dx$.
 - (c) $A(\lambda)$ est l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$. Déterminer $A(\lambda)$ puis calculer sa limite lorsque λ tend vers plus l'infini.