



**CONCOURS D'ADMISSION  
SERIE D et TI**

Coef : 1.5

**EPREUVE DE MATHEMATIQUE**

**Durée : 2 Heures**

*L'épreuve comporte deux exercices et un problème, la qualité de la rédaction et le soin apporté aux tracés des courbes seront pris en compte dans l'évaluation de chaque copie.*

**Exercice 1: 3,5 points**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A(-1 + 2i)$ ,  $B(3 + i)$  et  $C(-2 + i)$  la transformation plane  $S$  d'écriture complexe  $z' = (1 - i)z - 2 - i$ .

- 1) Placer les points A, B et C. 1pt
- 2) Déterminer les affixes des images par  $S$  des points B et C. 1pt
- 3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $S$ . 1,5pt

**Exercice 2 : 4,5 points**

Une urne contient 4 boules vertes, 2 rouges et 5 jaunes toutes indiscernables au toucher. On tire simultanément trois boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- 1) Tirer des boules de même couleur. 0,5pt
- 2) Tirer deux boules vertes et une boule rouge. 0,5pt
- 3) Tirer exactement deux boules vertes. 0,5pt
- 4) Tirer au plus deux boules vertes. 1pt
- 5) Tirer au moins deux boules vertes. 0,75pt
- 6) Tirer au moins une boule jaune. 0,5pt
- 7) Tirer des boules tricolores. 0,75pt

**Problème: 12 points**

On considère la fonction numérique d'une variable réelle  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln x - \ln(x+1)$ . On désigne par  $(C)$  la courbe représentative respective de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal du plan, d'unité graphique 1 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées. On considère la suite numérique  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par  $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ .

- 1) Calculer les limites de la fonction  $f$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ . 1,5pt
- 2) En déduire les branches infinies de  $(C)$ . 0,5pt
- 3) Déterminer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ , puis donner le sens de variation de  $f$ . 1,5pt
- 4) Dresser le tableau des variations de  $f$ . 0,5pt
- 5) En déduire le signe de la fonction  $f$  dans  $]0; +\infty[$ . 0,5pt
- 6) Construire la courbe  $(C)$ . 1,5pt
- 7) Calculer les trois premiers termes de la suite  $(U_n)$ . 1,5pt
- 8) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul par  $U_{n+1} - U_n = f(n)$ . 0,5pt

- 9) En déduire le sens de variation de la suite  $(U_n)$ . **0,5pt**
- 10) Soit  $k$  un entier naturel non nul.
- a) Montrer que  $\int_k^{k+1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0$ . **0,75pt**
- b) En déduire que  $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$ . **0,5pt**
- c) Démontrer que  $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$  (1). **0,75pt**
- d) En utilisant l'inégalité (1), démontrer que  $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ . **0,5pt**
- e) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul, par  $U_n \geq 0$ . **0,5pt**
- f) En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente. **0,5pt**