

**CONCOURS D'ADMISSION
 SERIE D & TI**

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUE
 Durée : 2 Heures**

Exercice 1 : 5 points

Un sac contient 3 jetons verts, 4 rouges et 5 jaunes tous indiscernables au toucher. On tire simultanément trois jetons du sac.

- Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux jetons verts. **1pt**
- Calculer la probabilité d'obtenir au moins un jeton jaune. **1pt**
- Calculer la probabilité d'obtenir au plus deux jetons rouges. **1,5pt**
- Calculer la probabilité d'obtenir au moins un jeton rouge et au plus deux jetons verts. **1,5pt**

Exercice 2 : 5 points

On considère dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives $3 + i$, $2i$ et $2 - 2i$ et le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par $P(z) = z^3 - (5 + i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i$.

- Montrer que $-8 + 6i = (1 + 3i)^2$. **0,5pt**
- Montrer que $2i$ est une racine de P. **1pt**
- Déterminer les nombres complexes a et b tels que $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$. **1pt**
- Résoudre alors dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^3 - (5 + i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i = 0$. **1,5pt**
- Donner la forme algébrique de $\frac{2-2i-(3+i)}{2i-(3+i)}$, puis en déduire la nature exacte du triangle ABC. **1pt**

Problème : 10 points

On considère les fonctions f et h définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$ et $h(x) = x^2 + 1 - \ln x$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Unité sur les axes 2 cm.

- Calculer la limite h en 0^+ . **0,5pt**
- Montrer que $h(x) = x^2(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2})$, puis en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. **1pt**
- Déterminer la dérivée h' de h, justifier que h'(x) a même signe que $2x^2 - 1$ et dresser le tableau des variations de h. **1,5pt**
- En déduire que pour tout x de $]0, +\infty[$, $h(x) > 0$. **0,5pt**
- Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. **1pt**
- Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{x^2 - x + \ln x}{x}$ et que $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$. **1pt**
- En déduire le sens de variation de la fonction f. **0,5pt**
- Dresser le tableau des variations de la fonction f. **1pt**
- Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C_f) quand x tend vers $+\infty$. **1pt**
- Étudier la position relative de (C_f) et de la droite (D). **1pt**
- Tracer (C_f) et (D). **1pt**