



**CONCOURS D'ADMISSION
SERIE D & TI**

EPREUVE DE MATHEMATIQUE

Durée : 2 Heures

Exercice 1 : 5 points

- 1) On considère la fonction numérique d'une variable réelle f définie par $f(x) = \sin^5 x$.
 - a) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = \sin x - 2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos^4 x$. **1pt**
 - b) Calculer alors l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$. **1pt**
- 2) Un sac contient 4 jetons verts, deux rouges et trois jaunes tous indiscernables au toucher. On tire simultanément trois jetons du sac.
 - a) Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux jetons rouges. **1pt**
 - b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un jeton rouge. **1pt**
 - c) Calculer la probabilité d'obtenir au plus deux jetons rouges. **1pt**

Exercice 2 : 3,5 points

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$, $(U_{n+1})^2 = 2U_n$.

- 1) Calculer U_2 et U_3 . On donnera le résultat sous forme 2^r où $r \in \mathbb{Q}$. **1pt**
- 2) On pose pour tout entier $n \geq 1$, $V_n = \ln U_n - \ln 2$.
 - a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et de raison 2. **1pt**
 - b) Donner l'expression de V_n en fonction de n et en déduire celle de U_n en fonction de n . **1,5pt**

Problème : 11,5 points

On considère la fonction numérique f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}$ et la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

- 1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$, puis donner une interprétation graphique du résultat. **1pt**
- 2) Justifier que la fonction f est dérivable en 1, puis sur $[1; +\infty[$. **1,5pt**
- 3) Montrer que pour tout réel x de $[1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$, puis donner le sens des variations de f . **1,5pt**
- 4) Dresser le tableau des variations de f . **1pt**
- 5) En déduire que pour tout réel x de $[1; +\infty[$, $f(x) < 0$. **0,5pt**
- 6) Démontrer que pour tout entier strictement positif, $U_{n+1} - U_n = f(n)$, puis en déduire le sens de variation de la suite (U_n) . **1,5pt**
- 7) Soit k un entier strictement positif.

- a) Montrer que $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{t} \right) dt \geq 0$. **1pt**
- b) En déduire que $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$ et que $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$. **1pt**
- c) Ecrire l'inégalité : $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ en remplaçant k par $1, 2, 3, \dots, n$ et démontrer que $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. **1,5pt**
- d) En déduire que pour tout entier non nul, $0 \leq U_n$. **0,5pt**
- 8) En déduire que la suite (U_n) est convergente. **0,5pt**