



**CONCOURS D'ADMISSION
SERIE D**

EPREUVE DE MATHEMATIQUE

Durée : 2 Heures

Exercice 1 : 5 points

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , unité graphique 2 cm.
On désigne par A, B et C les points d'abscisses respectives $z_A = 2i$; $z_B = 1$ et $z_C = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Soit r la transformation du plan, qui à tout point M d'abscisse z associe le point M' d'abscisse z' tel que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$. On désigne par (Γ) l'ensemble des points M d'abscisse z tels que $|z - 2i| = 2$ et par (D) l'ensemble des points M d'abscisse z tels que $|z - 1| = \left| z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right|$.

- 1) Placer les points A, B et C dans le repère. 1pt
- 2) Donner la nature et les éléments caractéristiques de r . 1pt
- 3) Déterminer et construire (Γ) . 1pt
- 4) Déterminer et construire (D) . 1pt
- 5) Déterminer et construire l'image de (Γ) par r . 1pt

Exercice 2 : 3 points

Le sang humain est classé en 4 groupes distincts A, B, AB et O. indépendamment du groupe sanguin, le sang peut posséder ou non le facteur rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit rhésus positif (Rh+), sinon il est dit rhésus négatif (Rh-). Une étude statistique faite sur une population P, les groupes sanguins se répartissent suivant le tableau 1. Pour chaque groupe sanguin, la proportion d'individus possédant ou non le facteur rhésus se répartit suivant le tableau 2.

Tableau 1

A	B	AB	O
40%	10%	5%	45%

Tableau 2

Groupe	A	B	AB	O
Rh+	82%	81%	83%	80%
Rh-	18%	19%	17%	20%

Un individu ayant un sang du groupe O et de rhésus négatif est appelé « **donneur universel** »

- 1) Un individu étant choisis au hasard dans la population P, déterminer la probabilité des événements suivants : A : « l'individu est un donneur universel » ; B : « l'individu a un sang de rhésus négatif ». 1,5pt
- 2) On choisit au hasard 5 individus de la population P, et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de donneurs universels figurant parmi ces 5 individus. On suppose la population suffisamment importante. Donner la loi de probabilité de X. 1,5pt

Problème : 12 points

Partie A : On considère l'équation différentielle (E): $2y'' - 3y' + y = 0$.

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E). 1,5pt
- 2) Déterminer la solution de cette équation différentielle qui vérifie les conditions suivantes : la courbe représentative de cette fonction passe par l'origine du repère et cette courbe admet à l'origine une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$. 1pt

Partie B : Dans cette partie on se propose d'étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par :

$g(x) = \ln \left| e^{\frac{x}{2}} - e^x \right|$. On note (C_g) la courbe de la fonction g dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , l'unité graphique étant de 2 cm.

- 1) Préciser les limites de g en $-\infty$; en $+\infty$ et en 0. 1,5pt
- 2) Montrer que $e^{\frac{x}{2}} - e^x \geq 0$ si et seulement si $x \leq 0$. 1pt
- 3) Montrer que $e^{\frac{x}{2}} - 2e^x \geq 0$ si et seulement si $x \leq -\ln 4$. 1pt
- 4) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \{0\}$, $g'(x) = \frac{\frac{x}{2} - 2e^x}{2(e^{\frac{x}{2}} - e^x)}$, puis dresser le tableau des variations de g . 2pts
- 5) a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $g(x) - x = \ln \left(1 - e^{-\frac{x}{2}} \right)$. 0,5pt
b) Montrer que la droite $(D): y = x$ est asymptote à la courbe (C_g) . 0,5pt
c) Etudier la position de la courbe (C_g) par rapport à la droite (D) . 0,5pt
- 6) a) Démontrer que pour tout réel $x < 0$, $g(x) - \frac{x}{2} = \ln \left(1 - e^{\frac{x}{2}} \right)$. 0,5pt
b) Montrer que la droite $(D'): y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C_g) . 0,5pt
c) Etudier la position de la courbe (C_g) par rapport à la droite (D') . 0,5pt
- 7) Construire (C_g) , (D) et (D') dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . 1pt