



CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE MATHÉMATIQUE

DUREE : 2 heures

Exercice 1 : 5 points

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$, $(U_{n+1})^2 = 2U_n$.

- 1) Calculer U_2 ; U_3 ; et U_4 . On donnera le résultat sous forme 2^r où $r \in \mathbb{Q}$. **1,5pt**
- 2) On pose pour tout entier $n \geq 1$, $V_n = \ln U_n - \ln 2$.
 - a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison. **1pt**
 - b) Donner l'expression de V_n en fonction de n et en déduire celle de U_n en fonction de n . **1,5pt**
 - 3) On pose $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$. Exprimer S_n en fonction de n . **1pt**

Exercice 2 : 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(3; -2; 2)$, $B(6; -2; -1)$, $C(6; 1; 5)$ et $D(4; 0; -1)$.

- 1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A et calculer son aire. **1pt**
- 2) Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan (ABC). **1pt**
- 3) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC). **1pt**
- 4) Calculer la distance du point D au plan (ABC). Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ? justifier. **1,5pt**
- 5) Calculer le volume du tétraèdre ABCD. **0,5pt**

Problème : 10 points

On considère la fonction numérique f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}$ et la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

- 1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$, puis donner une interprétation graphique du résultat. **1pt**
- 2) Justifier que la fonction f est dérivable en 1, puis sur $[1; +\infty[$. **1pt**
- 3) Montrer que pour tout réel x de $[1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$, puis donner le sens des variations de f . **1pt**
- 4) Dresser le tableau des variations de f . **1pt**

- 5) En déduire que pour tout réel x de $[1; +\infty[$, $f(x) < 0$. **0,5pt**
- 6) Démontrer que pour tout entier strictement positif, $U_{n+1} - U_n = f(n)$, puis en déduire le sens de variation de la suite (U_n) . **1,5pt**
- 7) Soit k un entier strictement positif.
- a) Montrer que $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{t} \right) dt \geq 0$. **1pt**
- b) En déduire que $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$ et que $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$. **1pt**
- c) Ecrire l'inégalité : $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ en remplaçant k par $1, 2, 3, \dots, n$ et démontrer que $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. **1pt**
- d) En déduire que pour tout entier non nul, $0 \leq U_n$. **0,5pt**
- 8) En déduire que la suite (U_n) est convergente. **0,5pt**