



**CONCOURS D'ADMISSION  
SERIE C**

**EPREUVE DE MATHEMATIQUE**

**Durée : 2 Heures**

**Exercice 1 : 5 points**

On tire simultanément 4 boules d'un sac qui en contient une blanche et 5 noires toutes indiscernables au toucher, puis on lance un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Si la boule blanche est tirée, il faut obtenir un numéro pair pour gagner. Si la boule blanche n'est pas tirée, il faut obtenir 6 pour gagner. On désigne par  $V$  l'événement « tirer la boule blanche » et  $G$  l'événement « le joueur gagne ».

- 1) Construire un arbre pondéré qui illustre ce jeu. **1pt**
- 2) Déterminer les probabilités de  $V$  et  $G$ . **1pt**
- 3) Le joueur gagne. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule blanche? **0,5pt**
- 4) Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule blanche? **0,5pt**
- 5) Pour participer à ce jeu, on mise 100 F. Si on gagne, on reçoit 2000 F. Si on ne gagne pas, mais on a tiré la boule blanche, le joueur récupère sa mise. Si on ne gagne pas et on n'a pas tiré la boule blanche, le joueur perd sa mise. Soit  $X$  la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.
  - a) Donner la loi de probabilité de  $X$ . **1pt**
  - b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de  $X$ . **1pt**

**Exercice 2: 4 points**

L'espace  $\mathcal{E}$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points  $A(-1; 0; 1)$ ,  $B(1; 2; 3)$ ,  $C(1; -1; 2)$  et  $D(3; -1; 5)$ .

- 1) Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent un plan dont on donnera une équation cartésienne. **1,5pt**
- 2) Montrer que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ne sont pas coplanaires. **0,5pt**
- 3) Calculer l'aire de  $ABC$  et le volume du tétraèdre  $ABCD$ . **2pts**

**Problème: 11 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x - 2 + \ln(x^2 + 1)$ .

- 1) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . **1pt**
- 2) Montrer que pour tout réel  $x$  strictement négatif,  
$$f(x) = x \left[ 2 - \frac{2}{x} + \frac{2 \ln(-x)}{x} + \frac{1}{x} \ln \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \right].$$
 **1pt**
- 3) puis en déduire la limite de  $f$  en  $-\infty$ . **0,5pt**
- 4) Calculer la dérivée de  $f$  et donner le sens de variation de  $f$ . **2pts**
- 5) Dresser son tableau des variations. **0,5pt**
- 6) Etudier les branches infinies de la courbe de  $f$ . **1,5pt**
- 7) Construire soigneusement la courbe de  $f$ . **1,5pt**
- 8) Montrer que la fonction  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers un intervalle que l'on déterminera. **1pt**
- 9) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une seule solution  $\alpha$  telle que  $0 < \alpha < 1$ . **1pt**
- 10) En déduire le signe de  $f(x)$  en fonction de  $x$ . **1pt**