



## CONCOURS D'ADMISSION

### SERIE C

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUE

DURÉE : 2 heures

### Exercice 1 : 5 points

- 1) Soient  $a, b, c$  et  $d$  des entiers relatifs et  $n$  un entier naturel non nul. Démontrer que si  $a \equiv b[n]$  et  $c \equiv d[n]$ , alors  $ac \equiv bd[n]$ . 1pt
- 2) Déterminer les entiers relatifs  $z$  tels que  $\frac{3z+1}{z+2}$  soit un entier. 1pt
- 3) On considère l'équation (E):  $23x - 26y = 3$ , où  $x$  et  $y$  sont entiers relatifs.
  - a) Déterminer un couple  $(x_0; y_0)$  d'entiers solution de l'équation (E). 0,5pt
  - b) Résoudre alors l'équation (E). 1,5pt
  - c) En déduire un entier  $a$  tel que  $0 \leq a \leq 25$  et  $23a \equiv 3[26]$ . 1pt

### Exercice 2 : 5 points

On considère dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives  $3 + i$ ;  $2i$  et  $2 - 2i$  et le polynôme P défini pour tout nombre complexe  $z$  par  $P(z) = z^3 - (5 + i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i$ .

- 1) Montrer que  $-8 + 6i = (1 + 3i)^2$ . 0,5pt
- 2) Montrer que  $2i$  est une racine de P. 1pt
- 3) Déterminer les nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que  $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$ . 1pt
- 4) Résoudre alors dans l'ensemble des nombres complexes l'équation  $z^3 - (5 + i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i = 0$ . 1,5pt
- 5) Donner la forme algébrique de  $\frac{2-2i-(3+i)}{2i-(3+i)}$ , puis en déduire la nature exacte du triangle ABC. 1pt

### Problème : 10 points

On considère les fonctions  $f$  et  $h$  définies sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$  et  $h(x) = x^2 + 1 - \ln x$ . On désigne par  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Unité sur les axes 2 cm.

- 1) Calculer la limite  $h$  en  $0^+$ . 0,5pt
- 2) Montrer que  $h(x) = x^2(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2})$ , puis en déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ . 1pt
- 3) Déterminer la dérivée  $h'$  de  $h$ , justifier que  $h'(x)$  a même signe que  $2x^2 - 1$  et dresser le tableau des variations de  $h$ . 1,5pt
- 4) En déduire que pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ ,  $h(x) > 0$ . 0,5pt
- 5) Calculer les limites de  $f$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ . 1pt
- 6) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + \ln x}{x}$  et que  $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ . 1pt
- 7) En déduire le sens de variation de la fonction  $f$ . 0,5pt
- 8) Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$ . 1pt
- 9) Montrer que la droite (D) d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à la courbe  $(C_f)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . 1pt
- 10) Étudier la position relative de  $(C_f)$  et de la droite (D). 1pt
- 11) Tracer  $(C_f)$  et (D). 1pt