



**CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C**

EPREUVE DE MATHEMATIQUE

Durée : 2 Heures

Exercice 1 : 5 points

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , unité graphique 2 cm.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_B = 1$ et $z_C = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Soit r la transformation du plan, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$. On désigne par (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2i| = 2$ et par (D) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1| = \left| z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right|$.

- 1) Placer les points A, B et C dans le repère. 1pt
- 2) Donner la nature et les éléments caractéristiques de r . 1pt
- 3) Déterminer et construire (Γ) . 1pt
- 4) Déterminer et construire (D) . 1pt
- 5) Déterminer et construire l'image de (Γ) par r . 1pt

Exercice 2 : 4 points

ABCD est un carré direct de centre I, J est le milieu du segment [CD]. On pose $f = R(A; \frac{\pi}{2}) \circ S_{(AC)}$, $g = S_{(AD)} \circ R(I; \frac{\pi}{2})$, S la similitude directe qui transforme A en I et B en J et $h = S \circ S$.

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f . 1pt
- 2) Déterminer la droite (L) telle que $R(I; \frac{\pi}{2}) = S_{(IJ)} \circ S_{(L)}$, puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de g . 1pt
- 3) Déterminer le rapport et l'angle de S. 0,5pt
- 4) On désigne par Ω le centre de S. Construire Ω . 0,5pt
- 5) Déterminer l'image par S de la droite(BC). En déduire $S(C)$ et le point $K = S(I)$. 1pt

Problème : 11 points

Partie A : On considère l'équation différentielle (E): $2y'' - 3y' + y = 0$.

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E). 1pt
- 2) Déterminer la solution de cette équation différentielle qui vérifie les conditions suivantes : la courbe représentative de cette fonction passe par l'origine du repère et cette courbe admet à l'origine une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$. 1pt

Partie B : Dans cette partie on se propose d'étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par :

$g(x) = \ln \left| e^{\frac{x}{2}} - e^x \right|$. On note (C_g) la courbe de la fonction g dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , l'unité graphique étant de 2 cm.

- 1) Préciser les limites de g en $-\infty$; en $+\infty$ et en 0. 1,5pt
- 2) Montrer que $e^{\frac{x}{2}} - e^x \geq 0$ si et seulement si $x \leq 0$. 1pt
- 3) Montrer que $e^{\frac{x}{2}} - 2e^x \geq 0$ si et seulement si $x \leq -\ln 4$. 1pt
- 4) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \{0\}$, $g'(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}} - 2e^x}{2(e^{\frac{x}{2}} - e^x)}$, puis dresser le tableau des variations de g . 1,5pt
- 5) a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $g(x) - x = \ln \left(1 - e^{-\frac{x}{2}} \right)$. 0,5pt
 b) Montrer que la droite $(D): y = x$ est asymptote à la courbe (C_g) . 0,5pt
 c) Etudier la position de la courbe (C_g) par rapport à la droite (D) . 0,5pt
- 6) a) Démontrer que pour tout réel $x < 0$, $g(x) - \frac{x}{2} = \ln \left(1 - e^{\frac{x}{2}} \right)$. 0,5pt
 b) Montrer que la droite $(D'): y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C_g) . 0,5pt
 c) Etudier la position de la courbe (C_g) par rapport à la droite (D') . 0,5pt
- 7) Construire (C_g) , (D) et (D') dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . 1pt