



CONCOURS D'ADMISSION

SÉRIE C

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

Session : 2023

Exercice 1 : (5pts) Un sac contient 5 boules indiscernables au toucher dont deux portent le numéro 1, deux portent le numéro 2 et une porte le numéro 3.

1. On tire simultanément et au hasard 2 boules du sac. On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des numéros obtenus.
 - (a) Déterminer la loi de probabilité de X .
 - (b) Calculer l'espérance mathématique de X .
2. On tire successivement et avec remise 2 boules du sac.
 - (a) Déterminer la probabilité de l'événement « les boules sont identiques ».
 - (b) On répète 10 fois de façon indépendante cette épreuve et on désigne par Y le nombre de fois qu'on obtient deux boules identiques lors de ces 10 épreuves.
 - i. Déterminer la loi de probabilité de Y .
 - ii. Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y .

Exercice 2 : (5pts)

On considère l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points $A(3; -2; 2)$, $B(6; 1; 5)$, $C(6; -2; -1)$ et $D(0; 4; -1)$.

1. Calculer le produit vectoriel $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ et en déduire que les trois points A, B et C sont non alignés.
2.
 - (a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
 - (b) Écrire une équation cartésienne du plan (\mathcal{P}_1) orthogonal à la droite (AC) et passant par A.
 - (c) Vérifier que le plan (\mathcal{P}_2) d'équation $x + y + z - 3 = 0$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3. Donner l'expression analytique de la projection p sur le plan (\mathcal{P}_2) .
4.
 - (a) Écrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre B et de rayon $R = 5\sqrt{3}$.
 - (b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $S \cap (\mathcal{P}_2)$.



5. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$. En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC) .

On rappelle que le volume du tétraèdre $ABCD$ est $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times AD$.

Problème : (10pts) Les parties A et B sont liées

Soit la fonction f définie sur $E = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$. On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique $1cm$.

Partie A : (6pts)

- (d) (a) Calculer les limites de f aux bornes de E .
- (b) Vérifier que $\forall x \in E, \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{x}} \right)$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. Tracer la courbe (\mathcal{C}) de f .
4. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$ que $f(x) \in [0; 1]$.
5. (a) Montrer que la dérivée f' de f est croissante sur $[0; 1]$ et en déduire que $\forall x \in [0; 1], |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.
- (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in [0; 1]$.
- (c) Montrer que pour tout $x \in [0; 1], |f(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3} |x - \alpha|$.

Partie B : (4pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, & ; \\ u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}, & \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n, 0 \leq u_n \leq 1$.
3. En déduire que (u_n) converge vers un nombre réel l tel que $0 \leq l \leq 1$.
4. (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha|$ et en déduire que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- (b) En déduire la limite l de la suite (u_n) .