



**CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C**

Coef : 1.5

EPREUVE DE MATHÉMATIQUE

Durée : 2 Heures

L'épreuve comporte deux exercices et un problème, la qualité de la rédaction et le soin apporté aux tracés des courbes seront pris en compte dans l'évaluation de chaque copie.

Exercice 1: 3 points

ABC est un triangle isocèle en A de sens direct et ACD un triangle rectangle isocèle en C de sens direct tels que : $AB = AC = CD$; $\text{mes}(\widehat{AB, AC}) = \frac{\pi}{4}$ et $\text{mes}(\widehat{CD, CA}) = \frac{\pi}{2}$. On désigne par r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $g = r_C \circ r_A$.

- a) Construire une figure. 0,5pt
- b) Déterminer les images par f de A et B. 1pt
- c) Justifier que g est une rotation. 0,5pt
- d) Déterminer l'angle et le centre Ω de g . 1pt

Exercice 2 : 5 points

Une urne contient 4 boules vertes, 2 rouges et 5 jaunes toutes indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

- 1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - a) Tirer des boules de même couleur. 0,5pt
 - b) Tirer deux boules vertes et une boule rouge. 0,5pt
 - c) Tirer exactement deux boules vertes. 0,5pt
 - d) Tirer au plus deux boules vertes. 1pt
- 2) Pour tirer successivement et sans remise trois boules de l'urne, on mise 200 FCFA. Chaque boule jaune tirée rapporte 500 FCFA. La boule verte et la rouge n rapporte rien. On désigne par X la variable aléatoire désignant le gain algébrique du joueur.
 - a) Donner la loi de probabilité de X. 1,5pt
 - b) Calculer l'espérance mathématique de X. Ce jeu est-il équitable ? 1pt

Problème: 12 points

On considère la fonction numérique d'une variable réelle f définie sur $]0; +\infty[$ par $(x) = \frac{1}{x+1} + \ln x - \ln(x+1)$. On désigne par (C) la courbe représentative respective de la fonction f dans un repère orthogonal du plan, d'unité graphique 1 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées. On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$.

- 1) Calculer les limites de la fonction f en 0^+ et en $+\infty$. 1,5pt
- 2) En déduire les branches infinies de (C). 0,5pt

- 3) Déterminer la dérivée f' de la fonction f , puis donner le sens de variation de f . **1,5pt**
- 4) Dresser le tableau des variations de f . **0,5pt**
- 5) En déduire le signe de la fonction f dans $]0; +\infty[$. **0,5pt**
- 6) Construire la courbe (C) . **1,5pt**
- 7) Calculer les trois premiers termes de la suite (U_n) . **1,5pt**
- 8) Montrer que pour tout entier naturel n non nul par $U_{n+1} - U_n = f(n)$. **0,5pt**
- 9) En déduire le sens de variation de la suite (U_n) . **0,5pt**
- 10) Soit k un entier naturel non nul.
- a) Montrer que $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0$. **0,75pt**
- b) En déduire que $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$. **0,5pt**
- c) Démontrer que $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ (1). **0,75pt**
- d) En utilisant l'inégalité (1), démontrer que $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. **0,5pt**
- e) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, par $U_n \geq 0$. **0,5pt**
- f) En déduire que la suite (U_n) est convergente. **0,5pt**