



Epreuve concours

Durée : 1h30min

Niveau : Master 1

Année académique 2021-2022

1- On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètres des réels non nuls et distincts

$$a, b \text{ et } c : (S) : \begin{cases} ax + ay + bz = b \\ bx + by + cz = c \\ cx + cy + az = a \end{cases}$$

Lesquelles des assertions suivantes sont vraies ?

- a) (S) est un système de Cramer ; b) (S) a une infinité de solutions
c) (S) est un système incompatible ; d) l'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

2- Soit $E = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est continue sur } [0, 1] \text{ et } \int_0^1 f(t)dt = 1\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- a) La fonction nulle appartient à E ; b) E est stable par addition.
c) E est stable par multiplication par un scalaire ; d) E n'est pas un espace vectoriel.

3- La suite numérique (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x + 1} dx$ est :

- a. croissante ; b. décroissante ; c. converge vers 0 ; d. aucune réponse n'est juste.

4- On considère la matrice A suivante $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des nombres réels.

Choisir la bonne réponse dans chacune des affirmations suivantes :

i) Le déterminant de la matrice A est :

- a) 0 b) $1 + c^2 + 2abc + b^2 - a^2$ c) $1 + a^2 + b^2 + c^2$ d) $1 - c^2 + 2abc - b^2 + a^2$

ii) La matrice A est :

- a) régulière b) singulière.

iii) Le rang de la matrice A est :

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

vi) La matrice A est :

- a) symétrique b) antisymétrique d) orthogonale

5- Soient A et B deux matrices carrées d'ordre $n > 1$ telles que $A = PBP^{-1}$. Si A est inversible, alors pour tout entier naturel k l'écriture de A^{-k} en fonction de B est donnée par :

- a) $PB^{-k}P^{-1}$; b) $P^{-k}B^{-k}P^{-k}$; c) PB^kP^{-1} ; d) Impossible d'écrire A^{-k} en fonction de B .

6- Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. L'inverse de P est donnée par :

- a) $\begin{pmatrix} -5 & 7 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$; b) P n'est pas inversible ; c) $\begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; d) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -7 & -1 & 5 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

7- Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur \mathbb{R} par : $f_k(x) = x + ke^{-x}$. Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur \mathbb{R} . La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe \mathcal{C}_k . Choisir les bonnes réponses :

- a) pour tout réel k strictement positif, les points A_k sont alignés,
b) pour tout réel k strictement positif, les points A_k forment un cercle,
c) pour tout réel k strictement positif, les points A_k sont confondus,
d) Aucune configuration possible.

8- Un élève essaie d'ouvrir une porte. Il possède un trousseau de 5 clés mais une seule clé est la bonne. On suppose les clés indiscernables et les essais aléatoires. Quelle est la probabilité p d'ouvrir la porte au 4^{ème} coup seulement ?

a) $p = \frac{1}{5^4}$; b) $p = \frac{13}{5^4}$; c) $p = \frac{4^3}{5^4}$; d) $p = \frac{1}{5}$.

9-Dans une classe, 70% des élèves jouent au football et 40% jouent au volley-ball; 15% des élèves pratiquent ces deux sports. Quel est le pourcentage d'élèves qui ne jouent ni au football, ni au volley-ball ?

a. 0%; b. On ne peut pas savoir car il manque des données; c. 10%; d. 5%.

10- La négation de la proposition "Pour toute porte, il existe une clé qui ouvre cette porte" est :

- a. Il existe une clé qui ouvre toutes les portes.
- b. Il existe une porte qui n'a pas de clé.
- c. Pour toute clé, il existe une porte ouverte par celle-ci.
- d. aucune négation.

11. On suppose que cinq bons fusibles et deux fusibles défectueux ont été mélangés; pour trouver les fusibles défectueux, on les teste un par un, au hasard et sans remise. La probabilité que nous ayons de la chance de retrouver tous les fusibles défectueux dans les deux premiers tests est : a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{4}{49}$ c) $\frac{1}{21}$ d) autre.