



Epreuve concours

Durée : 1h30min

Niveau : Master

Année académique 2021-2022

Exercice 1

Pour chaque question, plusieurs affirmations sont proposées, parmi lesquelles plusieurs peuvent être vraies. Pour chaque question, écrire les lettres de toutes les affirmations que vous pensez vraies.

1- Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$  et  $F : V \rightarrow V$  un endomorphisme. Alors  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $F$  si

- a) il existe un vecteur  $v \in V$  avec  $F(v) = \lambda v$ .
- b) il existe un vecteur  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , avec  $F(v) = \lambda v$ .
- c)  $\lambda$  est un zéro du polynôme caractéristique de  $F$ .
- d)  $\lambda$  est un zéro du polynôme minimal de  $F$ .

2- Soit  $A$  une matrice carré d'ordre  $n$  à coefficients dans un corps  $\mathbb{K}$ ,  $n \geq 1$ . Alors  $A$  est trigonalisable si

- a) il existe  $S \in GL_n(\mathbb{K})$ , telle que  $SAS^{-1}$  est une matrice triangulaire supérieure.
- b)  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .
- c)  $\mathbb{K}$  est un corps algébriquement clos (par exemple  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).
- d) le polynôme caractéristique de  $A$  se décompose en facteurs irréductibles.

3- Soit  $f = t^3 - t^2 + t - 4 \in \mathbb{C}[t]$  et  $g = t^2 + 1$ . Alors le reste  $r$  de la division euclidienne de  $f$  par  $g$  est

- a)  $t^3 - t^2 + t - 4$
- b)  $t^2 + 1$
- c) 0
- d) -3.

4- On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- a) La matrice  $A$  a deux valeurs propres distinctes.
- b) Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 2.
- c) Le polynôme minimal de  $A$  est de degré 2.

d) La matrice  $A$  est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

e) La matrice  $A$  est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

5- La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) est inversible.
- b) admet une valeur propre réelle non nulle.
- c) n'est pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .
- d) est orthogonale.

6- On considère le système d'équations, d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et de paramètre un réel  $m$  :

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = m \end{cases}$$

- a)  $(S)$  est équivalent au système  $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ y + 2z = m \end{cases}$ .

- b) Pour tout réel  $m$ ,  $(S)$  admet une solution.
- c) Si  $m = 1$ ,  $(S)$  n'admet pas de solution..
- d) Si  $m = 0$ , l'ensemble des solutions de  $(S)$  est une droite.

7- Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère les vecteurs  $u_1 = (1, 1, 1)$ ,  $u_2 = (0, 1, 1)$  et  $u_3 = (-1, 1, 0)$ .

- a)  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une famille libre.
- b)  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .
- c)  $u_2$  est une combinaison linéaire de  $u_1$  et  $u_3$ .
- d)  $\{u_1, u_2, u_3\}$  n'est pas une base de  $\mathbb{R}^3$ .

8- Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire.

- a)  $f$  est injective si et seulement si  $\ker(f)$  est vide.
- b)  $f$  est injective si et seulement si  $\ker(f)$  est une droite vectorielle.
- c)  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im}(f) = F$ .
- d)  $f$  est bijective si et seulement si  $\text{Im}(f) = F$ .

#### Exercice 2

Répondre par vrai ou faux à chacun des énoncés suivants.

I- Soit  $\mathcal{E}$  une expérience aléatoire et  $\Omega$  l'univers qui lui a été associé. Soient  $A$  et  $B$  deux évènements de probabilités respectives 0,5 et 0,6. On suppose que  $P(A \cap B) = \frac{4}{5}$ .  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ?

- a) oui.
- b) non.
- c) On ne peut pas se prononcer car on ne dispose pas de  $P(A \cup B)$ .
- d) On ne peut pas se prononcer car on ne dispose pas de détails sur l'expérience, sur  $\Omega$ ,  $A$  et  $B$ .

II- Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\{0, 1, 2\}$  et de loi donnée par  $P(X = 0) = P(X = 2) = a$  et  $P(X = 1) = 1 - 2a$ ; où  $a \in ]0, \frac{1}{2}[$  est une constante réelle.

1- Que valent l'espérance et la variance de  $X$  ?

- a)  $E(X) = 1$  et  $\text{Var}(X) = 1 + 2a$ .
- b)  $E(X) = 2a$  et  $\text{Var}(X) = 4a^2$ .
- c)  $E(X) = 1$  et  $\text{Var}(X) = 2a$ .

2- On pose  $Y = 4 - 2X$ . Sans déterminer la loi de  $Y$ , peut-on calculer l'espérance et l'écart-type de  $Y$  ?

- a) oui, ils valent respectivement 2 et  $\sqrt{8a}$ .
- b) oui, ils valent respectivement 2 et  $\sqrt{4(1-a)}$ .
- c) Oui, ils valent respectivement  $4(1-a)$  et  $4a$ .
- d) Oui, mais aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- e) Non, il nous faut nécessairement la loi pour calculer ces caractéristiques de  $Y$ .