INSTITUT SAINT JEAN

Tél : (+237) 657 07 98 07
(+ 237) 651 36 96 96
B.P : 749 Yaoundé, Cameroun
Email : info@institutsaintjean.org
www.institutsaintjean.org

CONCOURSD'ADMISSION
SERIE C, E

EPREUVE DE Mathématiques
Durée : 2 Heures

L'épreuve comporte deux exercices et un problème. Les pages sont numérotées de 1 à 2

Exercice 1 : 4,5 points

1) Soit S la transformation du plan dont l'écriture complexe $z' = (-1+i)z - 1 - 2i$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S. **1pt**
   b) Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan tels que $|(-1+i)z - 1 - 2i| = 2\sqrt{2}$. **1pt**
2) Soit (C) la courbe dont une équation cartésienne dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $-4x^2 + y^2 - 8x + 2y = 2$.
   a) Déterminer la nature exacte de (C), et ses éléments caractéristiques. **1,5pt**
   b) Construire (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **1pt**

Exercice 2 : 5,5 points

A/ Calculer chacune des intégrales suivantes : $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^t}\,dt$ et $\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. **1,5pt**

B/ Chacune des quatre questions suivantes comporte quatre réponses, une seule des réponses est juste. Relever le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

1) L'expression de $e^{(2-i2\alpha)}$ est égale à : A) $e^{2\alpha} + ie^{2\alpha}$; B) $e^{\alpha}\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha$; C) $e^{2\alpha}(\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha)$; D) $e^{2\alpha}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$. **1pt**
2) On considère le nombre complexe $z = 1 + \cos 2\theta + i\sin 2\theta$,. Alors : A) $\arg(z) = 0$; B) $|z| = 2\cos\theta$; C) $z = 2e^{i\theta}\cos\theta$; D) $\arg(z) = 2\theta$. **1pt**
3) Un joueur lance un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Il gagne 10 points si le dé marque 6. Il gagne 1 point si le dé marque 1 ou 4. Il ne gagne dans les autres cas. Soit Y la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le gain du joueur. La variance de Y est égale à :
   A) 2 ; B) 7 ; C) -2 ; D) 13. **1pt**
4) La fonction dérivée seconde g''de la fonction g définie par $g(x) = \int_0^{2x} e^{-t^2}\,dt$ est telle que :

A) $g''(x) = -2xe^{-x^2}$; B)$g''(x) = -16xe^{-4x^2}$; C) $g''(x) = -8xe^{-4x^2}$; D) $g''(x) = -8e^{-4x^2}$.**1pt**

<u>Problème :</u> **10 points**

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{f(x)} = \ln(e^{x} + e^{-x})$ et (C) la courbe de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f. **0,5pt**
2) Calculer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. **1pt**
3) Montrer que pour tout réel x, $\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. **0,5pt**
4) Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée f'. **1pt**
5) Montrer que pour tout réel x, $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x} + \ln(1 + e^{-2x})$. **1pt**
6) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$ dont on donnera une équation, puis étudier la position relative de (C) et (D). **1,5pt**
7) Étudier l'autre branche infinie de (C). **1pt**
8) Tracer (C) et (D). **1,5pt**
9) Discuter suivant les valeurs du réel α, le nombre de solution de l'équation $\mathrm{f(x)} = \alpha$. **1pt**
10) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(1 + e^{-2x}) < \alpha$, α étant un réel quelconque. **1pt**