PrépaVogt - Institut Saint Jean
Site web : www.prepavogt.org; Email : isjcameroun@gmail.com
Tel : 651 45 96 16 / 655 62 16 60

Concours d'entrée en 1er Année l'Institut Saint Jean

CYCLE INGENIEUR LOCAL

EPREUVE DE MATHEMATIQUES SERIE D, F, GCE/AL **Durée : 2 heures**

Exercice 1: 6 points

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) avec OI=OJ=2cm. On considère une autre fonction g définie sur IR par $g(x) = 1 - (x^2 + 2)e^{-x}$

1) Etude de la fonction auxiliaire g

1) a) Calculer les limites de g en +∞ et -∞ ***0,50 pt***

1) b) Calculer la dérivée de g et dresser le tableau de variation de g ***0,50 pt***

1) c) Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α telle que 0,35≤ α ≤ 0,36 et déduire le signe de g en fonction de α ***1 pt***

2) Etude de la fonction f

2) a) Calculer les limites de f en en +∞ et -∞ ***0,50 pt***

2) b) Démontrer que f(α) = α(1+2$e^{-\alpha}$) et à l'aide de l'encadrement de α ; déterminer un encadrement de f(α) d'amplitude $4x10^{-2}$ ***1 pt***

2) c) Calculer la dérivée f'(x) et dresser le tableau de variation de f ***0,75 pt***

2) d) Démontrer que la droite (D) d'équation y=x-1 est asymptote à (C_f) en +∞ ***0,25 pt***

2) e) Préciser la position relative de (C_f) par rapport à (D) ***0,25 pt***

2) f) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) en O ***0,25 pt***

2) g) Construire (T), la droite (D) et la courbe de f ***1 pt***

Exercice 2: 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 0$ et, pour tout entier n, $3u_{n+1} = u_n + 4$.

1. Calculer u_1 et u_2 . ***0.5 pt***
2. Démontrer que, pour tout entier n, $u_n \geq 2$. ***0.5 pt***
3. Montrer que u_n est une suite décroissante. ***1 pt***
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. ***1 pt***
5. On pose, pour tout entier n, $u_n = u_n - 2$
   a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. ***1 pt***
   b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n. ***0.5 pt***

<u>Exercice 3</u>: 4 points

On considère l'équation différentielle

(1) : $y' + y = 2e^{-x}$

Dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x, dérivable sur l'ensemble R.

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' + y = 0$ ***1 pt***

2. Soit la fonction g définie sur R par $g(x) = 2xe^{-x}$. Vérifier que g est solution de l'équation (1). ***1 pt***

3 On admet que toute solution h de (1) s'écrit sous la forme f + g, où f désigne une solution de l'équation (2) et g est la fonction ci-dessus.

(a) Déterminer la forme des solutions de l'équation (1). ***1 pt***

(b) Déterminer la solution h de l'équation (1) vérifiant la condition initiale $h(0) = -1$. ***1 pt***

<u>Exercice 4</u>: 5.5 points

1°) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2+2z+2 = 0$ ***1 pt***

2°) Soient K, L, M les points d'affixes respectives

$Z_K = 1+i$; $Z_L = 1 - i$; $Z_M = -i\sqrt{3}$

Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e1}, \overrightarrow{e2})$. Unité graphique 4cm. On complètera la figure dans les questions suivantes. ***0.75 pt***

3°) a) On appelle N le symétrique du point M par rapport au point L. Vérifier que l'affixe z_N du point N est : $2 + i(\sqrt{3} - 2)$. ***0.5 pt***

b) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point M en le point A et le point N en le point C. Déterminer les affixes respectives z_A et z_C des points A et C. ***1 pt***

c) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 2i transforme le point M en le point D et le point N en le point B. Déterminer les affixes respectives z_D et z_B des points D et B. ***0.5 pt***

4°) a) Montrer que le point K est le milieu des segments [DB] et [AC]. ***1 pt***

b) Montrer que : $\frac{Z_C - Z_K}{Z_B - Z_K} = i$. ***0.5 pt***

c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD. ***0.25 pt***